



DEVOIR MAISON III CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Partie I : Étude d'une fonction périodique.

1. a. On a $c'(t) = s''(t) = -s(t)$ puisque s vérifie (C1).
- b. La fonction h est dérivable comme composée par la fonction carrée et somme de fonctions dérivables. Puis on a

$$h'(t) = 2c'(t)c(t) + 2s'(t)s(t) = 2(-s(t)s'(t) + s(t)s'(t)) = 0.$$

Puisque h est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle, h est constante.

- c. On a $h(0) = c^2(0) + s^2(0) = (s'(0))^2 + (s(0))^2 = 1^2 + 0^2 = 1$. Or puisque h est constante, elle est toujours égale à sa valeur en 0. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = 1$, c'est-à-dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c^2(t) + s^2(t) = 1$.
- d. On obtient alors $s^2(t) = 1 - c^2(t)$, et puisque $c^2(t) \geq 0$, on a

$$0 \leq s^2(t) \leq 1 \quad \text{puis} \quad -1 \leq s(t) \leq 1.$$

Donc s est bornée par -1 et 1 . On raisonne de même pour c .

2. a. C'est une question assez difficile. Montrons d'abord que $s(\theta) > 0$ pour tout $\theta > 0$. Puisque $s'(0) = 1$ et que s' est continue sur $\mathbb{R}$, il existe un intervalle I centré en 0 et pour lequel, pour tout $x \in I$, $s'(x) > 0$. On en conclut que s est strictement croissante sur I et, combiné avec $s(0) = 0$, que donc pour $\theta > 0$ et $\theta \in I$, $s(\theta) > 0$.

Ceci n'est a priori uniquement valide dans I , il faut donc maintenant montrer que $s(\theta) > 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+$. Raisonnons alors par l'absurde et supposons donc qu'il existe un réel θ_0 tel que $s(\theta_0) \leq 0$. Fixons aussi $\theta_1 \in I$ tel que $s(\theta_1) > 0$ de sorte que

- (i) s est continue sur $[\theta_1, \theta_0]$.
- (ii) $s(\theta_1) > 1$.
- (iii) $s(\theta_0) < 0$.

Le théorème de la bijection s'applique alors et fournit l'existence d'un nombre θ_2 tel que $s(\theta_2) = 0$. C'est absurde car nous avons justement supposé que s ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.

Puisque $s''(\theta) = -s(\theta)$ d'après la condition (C1) et qu'on a montré que $s(\theta) > 0$, on obtient bien le résultat.

- b. (i) On sait que la fonction c est bornée (en particulier minorée) et la relation $s''(\theta) < 0$ s'écrit aussi $c'(\theta) < 0$. Puisque cette relation est vraie pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que c est décroissante. Par le théorème de la limite monotone, elle converge (appelons ℓ sa limite).

(ii) La fonction s est la primitive de c qui s'annule en 0 (elle s'annule en 0 d'après (C2)). D'après le cours, on sait que l'on peut écrire s sous cette forme intégrale car il y a unicité de la primitive de s qui s'annule en 0 et que la fonction $t \mapsto \int_0^t c(x)dx$ en est une.

(iii) C'est la question la plus difficile de cette partie. Raisonnons par l'absurde, supposons par exemple que $\ell > 0$ (l'argument serait similaire si ℓ était strictement négatif). Nous allons montrer alors que s n'est pas bornée.

Puisque c converge vers ℓ lorsque $t \rightarrow +\infty$, il existe A tel que pour tout $t \geq A$, $c(t) \geq \frac{\ell}{2}$. On a alors

$$s(t) = \int_0^t c(x)dx = \int_0^A c(x)dx + \int_A^t c(x)dx \geq \int_0^A c(x)dx + \int_A^t \frac{\ell}{2}dx.$$

La dernière inégalité a été obtenue en utilisant la croissance de l'intégrale. Puis la deuxième intégrale se calcule facilement et on obtient

$$s(t) \geq \int_0^A c(x)dx + \frac{\ell(t-A)}{2}.$$

On fait maintenant tendre t vers $+\infty$ dans l'expression précédente, et on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = +\infty,$$

ce qui montre que s n'est pas bornée et termine le raisonnement par l'absurde. On conclut nécessairement que $\ell = 0$.

- c. (i) La fonction c est strictement décroissante et tend vers 0, elle est donc strictement positive pour tout $t \geq 0$.
- (ii) Puisque $s' = c$, la question précédente montre que s est strictement croissante. Comme elle est aussi majorée, elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Et, d'après la relation (C2), $s(0) = 0$. On en conclut que la limite de s est strictement positive car s est strictement croissante.
- (iii) On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c'(x) = -s(x)$ d'après la question 1.a. En intégrant cette relation entre 0 et t (et par linéarité de l'intégrale), on obtient

$$c(t) - c(0) = - \int_0^t s(x)dx.$$

Or $c(0) = s'(0) = 1$ d'après (C2). On a bien finalement

$$c(t) = 1 - \int_0^t s(x)dx.$$

(iv) En procédant de manière analogue à la question 2.b.(iii), on montre que c ne peut être bornée si $\gamma > 0$. Or on sait que c est bornée. La contradiction provient de ce qu'on a supposé en introduction de la question 2., il n'est pas possible que s ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. a. Dérivons l'expression $\forall t \in \mathbb{R}, s(-t) = -s(t)$: on obtient $-s'(-t) = -s'(t)$, c'est-à-dire $-c(-t) = -c(t)$ ou encore $c(-t) = c(t)$, ce qui signifie que la fonction c est paire.
- b. Vérifions la condition (C1) : on a $\phi'(t) = s'(t+2\pi)$ puis $\phi''(t) = s''(t+2\pi)$. Donc $\phi''(t) + \phi(t) = s''(t+2\pi) + s(t+2\pi) = 0$ car la relation (C1) est valable pour s et pour tout t (donc pour tout nombre $t+2\pi$).

Vérifions maintenant la condition (C2) : on a $\phi(0) = s(2\pi)$. Pour calculer $s(2\pi)$, on se sert des relations de l'introduction de la question 3. : $s(2\pi) = s(\pi - (-\pi)) = s(-\pi) = -s(\pi) = 0$.

Par ailleurs, on a $\phi'(0) = s'(2\pi) = c(2\pi)$. Nous allons maintenant utiliser les dérivées des expressions de l'introduction de la question 3. Nous avons déjà exploité la dérivée de $s(-t) = -s(t)$, nous avons obtenu $c(-t) = c(t)$. En dérivant alors l'expression $s(\pi - t) = s(t)$, on obtient

$-c(\pi - t) = c(t)$. D'où $c(2\pi) = c(\pi - (-\pi)) = -c(\pi)$. Il s'agit donc de calculer $c(\pi)$, ce qui n'est pas facile. Tout d'abord on a

$$c^2(\pi) = 1 - s^2(\pi) = 1,$$

d'après la relation de la question **1.c** et parce que $s(\pi) = 0$. On conclut donc que soit $c(\pi) = 1$, soit $c(\pi) = -1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $c(\pi) = 1$, alors on a à la fois $c(0) = 1$ et $c(\pi) = 1$. Ceci implique, par le théorème de Rolle, qu'il existe un point $\theta \in]0, \pi[$ tel que $c'(\theta) = 0$. Or d'après la question **1.a.**, $c'(\theta) = -s(\theta)$. On conclurait alors que s s'annule dans l'intervalle $]0, \pi[$. Mais c'est absurde car π est la plus petite valeur où s s'annule. On a alors $c(\pi) = -1$ puis enfin $\phi'(0) = 1$, ce qui termine de vérifier la condition (C2).

Puisqu'il y a unicité de la fonction qui satisfait aux conditions (C1) et (C2), on conclut alors que $\phi(t) = s(t)$, c'est-à-dire, que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$s(t + 2\pi) = s(t).$$

c. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s(t + 2\pi) = s(t)$. Dérivons cette expression. On obtient $s'(t + 2\pi) = s'(t)$, c'est-à-dire $c(t + 2\pi) = c(t)$.

d. (i) Nous avons déjà remarqué que $c(0) = 1$, $c(\pi) = -1$, que c est continue (car dérivable) et que $c'(t) = -s(t) < 0$ sur $]0, \pi[$, donc que c est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Le théorème de la bijection montre qu'il existe $\theta \in]0, \pi[$ tel que $c(\theta) = 0$.

(ii) On a $s'(\theta) = 0$, $s'(t) > 0$ pour $t < \theta$ car c est décroissante sur $[0, \theta]$ (en utilisant par exemple la relation $c' = -s$), puis $s'(t) < 0$ pour $t > \theta$. On constate donc que s est croissante sur $[0, \theta]$ puis décroissante sur $[\theta, \pi]$ de sorte que s atteint un maximum en θ .

(iii) Nous avons déjà établi la relation $c(t) = -c(\pi - t)$. Appliquons cette relation à $\frac{\pi}{2}$ et on obtient $c(\frac{\pi}{2}) = -c(\frac{\pi}{2})$, c'est-à-dire que $c(\frac{\pi}{2}) = 0$. Puisque le réel en lequel c s'annule est unique, on obtient $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(iv) On procède exactement comme à la question **3.b.**, cette fois-ci c'est plus facile puisque toutes les relations qui nous servent à vérifier la condition (C2) ont déjà été établies.

4. a. On a $R(0) = \begin{pmatrix} c(0) & -s(0) \\ s(0) & c(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

b. Le déterminant de $R(t)$ est, par définition $\det(R(t)) = c(t)c(t) + s(t)s(t) = 1$ d'après la question **1.c.**

c. Il y a une formule toute faite pour exprimer l'inverse d'une matrice de taille 2×2 avec le déterminant : on a

$$R(t)^{-1} = \begin{pmatrix} c(t) & s(t) \\ -s(t) & c(t) \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que $R(t)^{-1} = R(-t)$ grâce aux relations de parité des fonctions s et c .

d. On fait marcher la méthode habituelle : λ est valeur propre de $R(t)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} R(t) - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c(t) - \lambda & s(t) \\ s(t) & c(t) - \lambda \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow (c(t) - \lambda)^2 + s(t)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2c(t)\lambda + c^2(t) + s^2(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2c(t)\lambda + 1 = 0. \end{aligned}$$

On conclut alors que les valeurs propres de $R(t)$ sont les racines du polynôme P défini par $P(\lambda) = \lambda^2 - 2c(t)\lambda + 1$. On calcule son discriminant

$$\Delta = 4c^2(t) - 4.$$

On rappelle alors que $c^2(t) \leq 1$ de sorte que $\Delta \leq 0$. De plus $c(t) = 1$ lorsqu'il existe k tel que $t = 2k\pi$ (t doit être un multiple entier de 2π) : en effet, on sait que $c(0) = 1$, et par périodicité,

pour tous $k \in \mathbb{Z}$, $c(2k\pi) = 1$. Il n'y a pas d'autres valeurs pour lesquels c prend la valeur 1¹. Ainsi, dans le cas où $c(t) = 1$, alors les valeurs propres de $R(t)$ sont les racines de $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, c'est-à-dire 1. Dans le cas où $c(t) < 1$, alors $R(t)$ n'a aucune valeur propre. Remarquons que dans le cas où $c(t) = 1$, alors $s(t) = 0$ et la matrice $R(t)$ est alors égale à la matrice identité I_2 comme dans la question 4.a.

- e. (i) On utilise à nouveau la méthode que nous avons déjà vue : on a dans un premiers temps

$$\psi'_\theta(t) = c(t - \theta)c(\theta) - s(t - \theta)s(\theta)$$

(attention : on dérive ici par rapport à t et θ est considérée comme une constante). Puis

$$\psi''_\theta(t) = -s(t - \theta)c(\theta) - c(t - \theta)s(\theta)$$

et on remarque que $\psi''_\theta(t) + \psi_\theta(t) = 0$ et la condition (C1) est vérifiée pour ψ_θ . Puis

$$\psi_\theta(0) = s(-\theta)c(\theta) + c(-\theta)s(\theta) = -s(\theta)c(\theta) + s(\theta)c(\theta) = 0.$$

On a utilisé ici la parité de c et l'impairité de s . Puis de la même façon

$$\psi'_\theta(0) = c(-\theta)c(\theta) - s(-\theta)s(\theta) = c^2(\theta) + s^2(\theta) = 1,$$

ce qui termine de vérifier (C2). On conclut alors que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\psi_\theta(t) = s(t - \theta)c(\theta) + c(t - \theta)s(\theta) = s(t).$$

- (ii) On applique la relation précédente avec $t = t + \theta$. Il vient

$$s(t + \theta) = s(t + \theta - \theta)c(\theta) + s(\theta)c(t - \theta + \theta) = s(t)c(\theta) + s(\theta)c(t),$$

ce qui est la relation attendue à changement de lettres près.

- (iii) On dérive la relation précédente par rapport à u (v étant considéré comme une constante) et il vient exactement la formule souhaitée.

- (iv) On a facilement

$$\begin{aligned} R(u)R(v) &= \begin{pmatrix} c(u) & -s(u) \\ s(u) & c(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(v) & -s(v) \\ s(v) & c(v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c(u)c(v) - s(u)s(v) & -c(u)s(v) - c(v)s(u) \\ c(u)s(v) + c(v)s(u) & c(u)c(v) - s(u)s(v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c(u+v) & -s(u+v) \\ s(u+v) & c(u+v) \end{pmatrix} \\ &= R(u+v) \end{aligned}$$

5. a. On connaît la dérivée de s : $s'(t) = c(t)$ et que $c(t) > 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ car c est positive entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et c est paire.
- b. On sait que s est continue (car dérivable) sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, que s est strictement croissante sur cet intervalle et que $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1 - c^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ car s est positive en $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que $s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, puis, par imparité, $s\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. On conclut par le théorème de la bijection.
6. a. (i) La dérivée de s ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. D'après le cours, on en déduit que la bijection réciproque est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- (ii) Puisque l'image de a est l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur lequel c est positive, on a

$$c(a(t)) = \sqrt{1 - s^2(a(t))} = \sqrt{1 - t^2}.$$

1. Et il peut être intéressant de se demander pourquoi.

(iii) On a, toujours d'après le cours,

$$a'(s(x)) = \frac{1}{s'(x)} = \frac{1}{c(x)}.$$

En posant $x = a(t)$, on a d'une part $s(x) = s(a(t)) = t$ et d'autre part $c(a(t)) = \sqrt{1-t^2}$. D'où

$$a'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

- b. (i) On a déjà remarqué que $s(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et que $s(\frac{\pi}{2}) = 1$. En composant par la fonction a , on obtient que $a(1) = \frac{\pi}{2}$ et que $a(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
- (ii) On vient donc de construire une primitive de la fonction à intégrer, c'est la fonction a . En oubliant quelques détails qui consisteraient à traiter correctement le fait que l'intégrale est impropre en ± 1 , on a

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = a(1) - a(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

- (iii) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, continue sauf en -1 et 1 , évidemment positive et nous venons de montrer que son intégrale est 1.

Partie II : Intégrale de Gauss.

7. On a donc, pour $n = 0$,

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^0(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Et pour $n = 1$,

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c(t) dt = [s(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = s\left(\frac{\pi}{2}\right) - s(0) = 1 - 0 = 1.$$

8. On pose donc $t = \frac{\pi}{2} - u$. On a donc $dt = -du$, les bornes de l'intégrale sont échangées (lorsque t vaut 0, alors u vaut $\frac{\pi}{2}$ et inversement). D'où

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^n(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 c^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} s^n(u) du.$$

9. Nous avons déjà établi que la fonction c est positive entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Les bornes de l'intégrale étant dans le bon sens, on peut conclure directement à la positivité de W_n par positivité de l'intégrale.

Pour la décroissance de $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il suffit de remarquer que, puisque $c(t) \in [0, 1]$, on a, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$c^{n+1}(t) \leq c^n(t).$$

On conclut par croissance de l'intégrale.

10. On a déjà

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^{n+2}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - s^2(t)) c^n(t) dt = W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} s^2(t) c^n(t) dt$$

par linéarité de l'intégrale. On calcule alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} s^2(t) c^n(t) dt$ avec une intégration par parties, en posant $u(t) = s(t)$ (et donc $u'(t) = c(t)$) et $v'(t) = s(t) c^n(t)$ (et donc $v(t) = -\frac{1}{n+1} c^{n+1}(t)$). Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} s^2(t) c^n(t) dt = \left[\frac{-s(t)}{n+1} c^{n+1}(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^{n+2}(t) dt = \frac{W_{n+2}}{n+1}.$$

En reprenant l'expression de W_{n+2} avant l'IPP, nous avons donc

$$W_{n+2} = W_n - \frac{W_{n+2}}{n+1}$$

ou encore

$$(n+1)W_{n+2} = (n+1)W_n - W_{n+2}.$$

D'où $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et finalement

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

11. On a

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_nW_{n+1} \\ &= (n+2)W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n - (n+1)W_{n+1}W_n \\ &= (n+1)W_nW_{n+1} - (n+1)W_nW_{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On conclut que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Pour calculer sa valeur, on calcule son premier terme :

$$J_0 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \frac{\pi}{2}$.

12. La première égalité n'est qu'une reformulation de la conclusion de la question 10.. Les deux inégalités proviennent directement du fait que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

13. Considérons l'expression

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

de la question précédente. Le théorème des gendarmes s'applique et montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1,$$

ce qui signifie que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{n+1}$. Ensuite, de la question 11, on tire que

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)W_nW_{n+1}.$$

En passant aux équivalents et en tenant compte de ce que l'on vient de faire, on a

$$W_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$

car les équivalents passent au produit. Puis, comme les équivalents passent à la racine carrée, on a

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

14. Méthode classique du x^2 (à rédiger parfaitement).

15. Très très classique.

16. Il suffit d'écrire

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq \exp\left(-n \frac{x^2}{n}\right) = e^{-x^2}.$$

L'inégalité utilise à la fois la question précédente (car $t = \frac{x^2}{n} \in [0, 1]$ avec $0 \leq x \leq \sqrt{n}$) et la croissance de la fonction exponentielle. On passe ensuite à l'intégrale en utilisant la positivité de l'intégrale.

17. On a cette fois-ci, pour tout $t \in [0, 1]$

$$\ln(1+t) \geq -t$$

(c'est facile aussi). C'est-à-dire, avec $x = \frac{x^2}{n}$,

$$\log\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) \geq -\frac{x^2}{n}.$$

Puis

$$n \log \left(1 + \frac{x^2}{n} \right) \geq -x^2.$$

On conclut en passant à l'exponentielle puis en intégrant.

- 18.** On suit donc l'indication et on effectue le changement de variables $x = \sqrt{n}c(u)$. Lorsque x vaut 0, on a donc $c(u) = 0$, soit $u = \frac{\pi}{2}$ et lorsque x vaut $\sqrt{n}$, alors $c(u) = 1$ et $u = 0$. Par ailleurs, en dérivant la relation de changement de variables, on trouve $dx = \sqrt{n}c'(u)du = -\sqrt{n}s(u)du$. Enfin $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = (1 - c^2(u))^n = (s^2(u))^n = s^{2n}(u)$. On a donc

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 s^{2n}(u) (-\sqrt{n}s(u)) du = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} s^{2n+1}(u) du = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$

- 19.** De l'encadrement obtenu à la question précédente, on tire

$$\frac{\sqrt{n}W_{2n+1}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \leq \frac{\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}W_{2n-2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

On cherche alors les limites des deux termes encadrants, à l'aide de l'équivalent de la question **13**. On a (par exemple pour le terme de droite mais ce serait similaire à gauche)

$$\frac{\sqrt{n}W_{n-2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1.$$

Il ressort de ce calcul (et du théorème des gendarmes) que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.